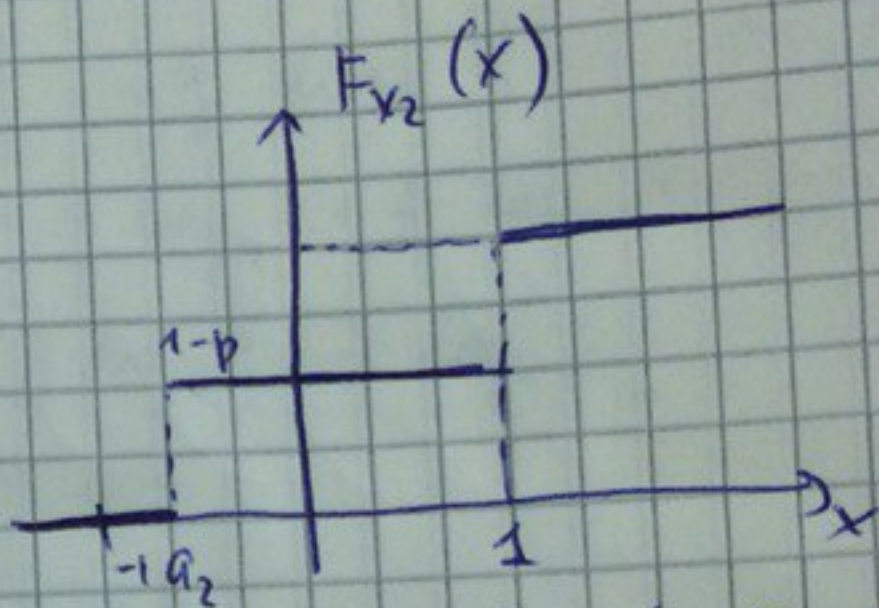
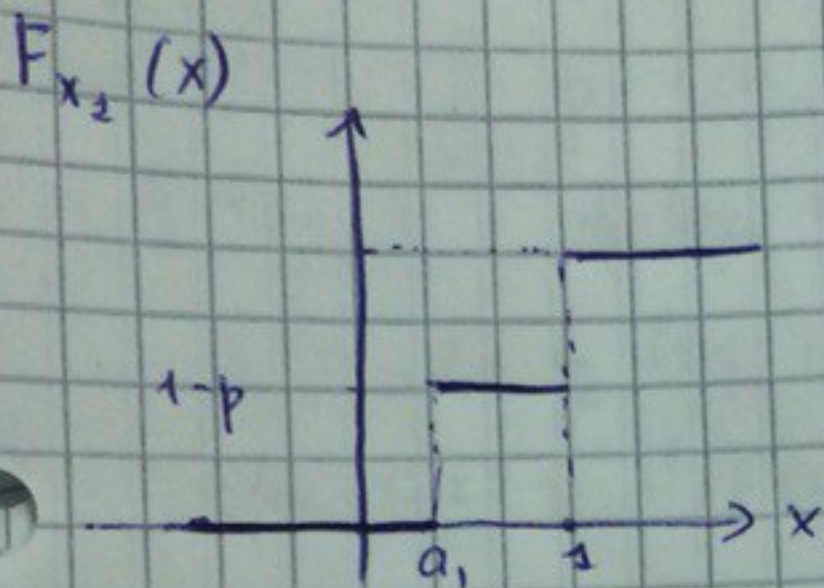


Найти раст. леву между X_1 и X_2

$$X_i = \begin{cases} 1, p \\ a_i, 1-p \end{cases}$$

$$|a_i| < 1, i = 1, 2$$



Расстояние леву $L(X_1, X_2) = L(F_{X_1}(x), F_{X_2}(x))$
 макс. сторона квадрата, кот. можно вписать
 между функциями $\Rightarrow L(X_1, X_2) = \min(|a_1 - a_2|, 1-p)$

Найти дисперсию пуасс. сумм.

$DS_N = ENDX_i + DN(EX_i)^2$ - св-во сл. суммы,
т.к. сумма S_N - пуасс., то $N \sim \Pi(\lambda) \Rightarrow$
 $EN = DN = \lambda$

$$DX_i = EX_0^2 - (EX_i)^2 \Rightarrow DS_N = \lambda (EX_i^2 - (EX_i)^2 + (EX_0)^2) =$$

$$\text{Ответ: } DS_N = \lambda EX_i^2 = \lambda EX_0^2$$

$$X \sim N(0, 1) \quad \text{u} \quad Y = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ 3, & \frac{1}{4} \\ 5, & \frac{1}{4} \end{cases}, \quad Z = X \cdot Y$$

$$h(x) = \frac{1}{2} \Phi(x) + \frac{1}{3} \Phi\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \Phi\left(\frac{x}{5}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Phi(x) + \frac{1}{12} \Phi(x) + \frac{1}{12} \Phi\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{20} \Phi\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$\mathbb{E} Z = \int_{-\infty}^{+\infty} x h(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\frac{1}{2} \Phi(x) + \frac{1}{12} \Phi\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{20} \Phi\left(\frac{x}{5}\right) \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x \Phi(x) dx + \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{+\infty} x \Phi\left(\frac{x}{3}\right) dx + \frac{1}{20} \int_{-\infty}^{+\infty} x \Phi\left(\frac{x}{5}\right) dx = 0$$

$$(\text{m.v.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \left. -\frac{e^{-x^2}}{2} \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0)$$

Antwort: $\mathbb{E} Z = 0$.

Doc-mn: $|Ez - \text{med}z| \leq \sqrt{Dz}$

$|Ez - \text{med}z| \leq \underbrace{\{ \text{lep-to} \}}_{\text{nonynela}} \leq |Ez - \text{med}z| \leq$

$f(E(x)) \leq E(f(x))$

$|x| \leq |Ez - Ez| \leq \{ \text{lep-to nonynela} \} \leq (E(z - Ez))^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{Dz}$

$* |Ez - a| \rightarrow \min_a$

$\min_a = \text{med}z$

$\exists a > \text{med}z$

$|z - a| - |z - \text{med}z| =$

$\begin{cases} \text{med}z - a \\ a - 2z + \text{med}z \\ a - \text{med}z \end{cases}$

$\begin{cases} z > a \\ z \in (\text{med}z, a) \\ z \leq \text{med}z \end{cases}$

$\geq \begin{cases} \text{med}z - a \\ \text{med}z - a \\ a - \text{med}z \end{cases}$

$\begin{cases} z > a \\ z \in (\text{med}z, a) \\ z \leq \text{med}z \end{cases}$

$(\text{m.u. } a - 2z + \text{med}z > \text{med}z - a)$

$= \begin{cases} \text{med}z - a & z > \text{med}z \\ a - \text{med}z & z \leq \text{med}z \end{cases}$

$\Rightarrow E(|z - a| - |z - \text{med}z|) \geq$

$\geq E(\text{med}z - a) I(z > \text{med}z) + E(a - \text{med}z) I(z \leq \text{med}z)$

$= (\text{med}z - a) P(z > \text{med}z) + (a - \text{med}z) P(z \leq \text{med}z) =$

$= (a - \text{med}z) (P(z \leq \text{med}z) - \underbrace{P(z > \text{med}z)}_{\geq 0})$

$\Rightarrow E(|z - a|) \geq E|z - \text{med}z|$

3) Док-но, что из условия Ляпунова следует условие Линдберга.

$$\square \quad \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|X-a_i| > \varepsilon B_n} (X-a_i)^2 dF_i(x) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|X-a_i| > \varepsilon B_n} \frac{|X-a_i|^3}{|X-a_i|} dF_i(x)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon B_n^3} \sum_{i=1}^n \int_{|X-a_i| > \varepsilon B_n} |X-a_i|^3 dF_i(x) \leq \frac{1}{\varepsilon B_n^3} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |X-a_i|^3 dF_i(x) =$$

$$= \left(\mu_i^3 = \mathbb{E} |X_i - a_i|^3, \quad M_n^3 = \mu_1^3 + \dots + \mu_n^3 \right) /$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{M_n^3}{B_n^3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{по у. Ляпунова}} 0, \quad \text{т.е. у. Линдберга выполнено}$$



Косердн, кроексса
 $X \sim N(0, 2)$

$$EX = 0, DX = 2$$

$$\mathcal{L}(x) = F\left(\frac{x - EX}{\sqrt{DX}}\right)^4 = \frac{1}{4} EX^4$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$EX^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \frac{2^4 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} = 12$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$$

Оулксм: 3.

$$N \sim \text{Geom}(p), \quad \mathbb{E} Z_i = a, \quad \text{ID} Z_i = b^2$$

$$\text{ID} S_N = \mathbb{E} N \text{ID} Z_i + \text{ID} N (\mathbb{E} Z_i)^2 \quad \text{сб-бо cr. cymu}$$

$$\mathbb{E} N = \frac{1-p}{p}; \quad \text{ID} N = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \text{ID} S_N = \frac{1-p}{p} \cdot b^2 + \frac{1-p}{p^2} \cdot a^2 = \frac{1-p}{p^2} (pb^2 + a^2)$$

$$\text{Дублируем: } \text{ID} S_N = \frac{1-p}{p^2} (pb^2 + a^2)$$

Формула генерации

$$\mathbb{E} S_N = \frac{1}{i} f'_{S_N}(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{i} (\psi(f(t)))' \Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} = \mathbb{E} N \cdot \mathbb{E} X_i$$

$$\mathbb{E} S_N^2 = - f''_{S_N}(t) \Big|_{t=0} = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} \right)' \Big|_{t=0} =$$

$$= \mathbb{E}(N(N-1)) (\mathbb{E} X_i)^2 + \mathbb{E} N \mathbb{E} X_i^2 = \mathbb{E} N^2 (\mathbb{E} X_i)^2 - \mathbb{E} N (\mathbb{E} X_i)^2 + \mathbb{E} N \mathbb{E} X_i^2 = \mathbb{E} N^2 (\mathbb{E} X_i)^2 + \mathbb{E} N \text{ID} X_i$$

$$\text{ID} S_N = \mathbb{E} S_N^2 - (\mathbb{E} S_N)^2 = \mathbb{E} N^2 (\mathbb{E} X_i)^2 + \mathbb{E} N \text{ID} X_i - (\mathbb{E} N)^2 (\mathbb{E} X_i)^2$$

$$= \text{ID} N (\mathbb{E} X_i)^2 + \mathbb{E} N \text{ID} X_i$$

$$\text{m.k. } N \sim \text{Geom}(p)$$

Докажем, что $P(|x-a| < 3b) \geq \frac{8}{9}$ при $EX=a, DX=b^2$

$$P_1 \equiv P(|x-a| \geq 3b) = P(|x-EX| \geq 3\sqrt{DX}) \leq \frac{DX}{(3\sqrt{DX})^2} = \frac{1}{9}$$

поэтому $P(|x-a| < 3b) = 1 - P_1 \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ по неравенству Чебышева

$$\xi \sim \exp(1)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(\xi) &= -\mathbb{E} \log_a f_3(x) = -\int_0^{\infty} f_3(x) \log_a f_3(x) dx = \\ &= -\int_0^{\infty} e^{-x} \log_a e^{-x} dx = -\int_0^{\infty} x e^{-x} \log_a e dx = \log_a e \left(-e^{-x} \right. \\ &\quad \left. \cdot x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \right) = \log_a e \left(-e^{-x} \Big|_0^{\infty} \right) = \log_a e \end{aligned}$$

$$\xi \sim R[0, 2]$$

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{2-0} I([0, 2]) = \frac{1}{2} I([0, 2])$$

$$H(\xi) = -E \log_a F_{\xi}(x), a > 1$$

$$H(\xi) = - \int_0^2 \frac{1}{2} \log_a \frac{1}{2} dx$$

$$\text{] } a=2 \text{ (u.r.p. to } \delta_{\max}), \text{ maka } H(\xi) = - \int_0^2 \frac{1}{2} \log_a \frac{1}{2} dx = \\ = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\text{Orubem: } H(\xi) = 1.$$

$X_1, X_2, \dots$ н.о. р.с.б.

Каждое X_i имеет ф.р. $X_i: f(t)$

$N \sim \Pi(1)$

$N, X_1, \dots$ - независим. с.б., $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$

$f_{S_N} = ?$

Используем формулу

$$\psi(s) = e^{\lambda(s-1)} = e^{\lambda s - \lambda}$$

$$f_{S_N} = \psi(f(t)) = e^{\lambda(f(t)-1)}$$

$$f_{S_N}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{S_N}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)\right) \quad (*)$$

м.к. при $x \rightarrow \infty \Rightarrow$ можно почленно интегрировать;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF^{*n}(x) = \mathbb{E} e^{it(x_1 + \dots + x_n)} = (f(t))^n$$

$$(*) \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^n(t) = \psi(f(t))$$

$\psi(s)$ - производящая функ. N

м.к. $N \sim \Pi(\lambda)$

$$\psi(s) = e^{\lambda(s-1)} = e^{\lambda s - \lambda}$$

$$f_{S_N} = \psi(f(t)) = e^{\lambda(f(t)-1)}$$